Föreläsning 2

Linjär algebra (FMA420)
Anders Källén

Innehåll: Baser och koordinatsystem

Kapitel 2.3-2.4, 6.1-6.2, 3.1

Efter dagens föreläsning måste du veta

- vad som menas med att ett antal vektorer är linjärt (o)beroende
- vad som menas med en bas för en mängd vektorer
- vad som menas med ett koordinatsystem för en punktmängd

Linjärkombinationer av vektorer

I F1 såg vi hur vi ibland kunde uttrycka en vektor i andra. Mer precist skrev vi t.ex. vektorn till tyngdpunkten som

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{w}, \quad \vec{u} = \overrightarrow{OP}, \vec{v} = \overrightarrow{OQ}, \vec{w} = \overrightarrow{OR}.$$

När vi skriver

$$\vec{u} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \ldots + x_n\vec{u}_n$$

säger vi att vi skriver $\vec{u}$ som en *linjärkombination* av $\vec{u}_k, k = 1, \ldots, n$.

Antag att detta går på två sätt:

$$\vec{u} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \ldots + x_n\vec{u}_n = y_1\vec{u}_1 + y_2\vec{u}_2 + \ldots + y_n\vec{u}_n.$$

Då måste vi ha att

$$z_1\vec{u}_1 + z_2\vec{u}_2 + \ldots + z_n\vec{u}_n = 0, \text{ där } z_k = x_k - y_k, k = 1, \ldots, n.$$

(0 är egentligen $\vec{0}$...). För att det ska vara två olika framställningar av $\vec{u}$ måste något $z_k \neq 0$ och vi kan då lösa ut $\vec{u}_k$ som en linjärkombination av de övriga.

Definition Vektorerna $\vec{u}_k, k = 1, \ldots, n$ sägs vara linjärt beroende om någon av dem kan skrivas som en linjärkombination av de övriga. Om så inte är fallet sägs de vara linjärt oberoende.

Anmärkning Följande har vi redan sagt men tål att upprepas:

- Vektorerna är linjärt oberoende om

$$x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \ldots + x_n\vec{u}_n = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \ldots = x_n = 0.$$

- Om $\vec{u}_k, k = 1, \ldots, n$ är linjärt oberoende, kan en annan vektor $\vec{u}$ skrivas som en linjärkombination av dessa på *högst ett* sätt.

Definition Givet några vektorer $\vec{u}_k, k = 1, \ldots, n$ så utgör alla vektorer som kan skrivas som linjärkombinationer av dessa ett vektorrum som *spänns upp* av dessa vektorer.

Exempel Tag två vektorer i rummet. Om ej parallella, spänner de upp ett plan. Om parallella en linje.

Egenarbete

För att säkerställa att du vet vad som menas med linjärt beroende, oberoende och vad en linjärkombination är, lös uppgifterna **2.19, 2.20**.

Baser i vektorrum - koordinatframställning av vektorer

För att beskriva vektorer (och kunna räkna med dem) måste man först fixera en s.k. bas av vektorer.

Definition Om vektorerna $\vec{u}_k, k = 1, \ldots, n$ är linjärt oberoende så utgör de en *bas* för det vektorrum de spänner upp. Varje vektor i detta rum kan då på ett *entydigt sätt* skrivas som en linjärkombination av dessa:

$$\vec{u} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \ldots + x_n\vec{u}_n.$$

och koefficienterna $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kallas då *koordinaterna* för vektorn *$\vec{u}$ med avseende på denna bas*.

Anmärkning Notera att även basvektorerna har koordinatframställningar:

$$\vec{u}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \quad \vec{u}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0) \quad \text{etc.}$$

Basvektorer betecknas ofta $\vec{e}_k$ för att särskilja dem.

Definition Låt V vara ett vektorrum. Om vektorerna $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ är linjärt oberoende och spänner upp V, så säger man att $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ utgör en bas i V.

Egenarbete

Lös nu uppgiften **2.22** för att försäkra dig om att du har en bild av vad det betyder att vektorer utgör en bas.

Vektorer i plan och rum

Vi börjar med att säga att två vektorer $\vec{u}$ och $\vec{v}$ är parallella om det finns ett tal x sådant att $\vec{u} = x\vec{v}$. (Speciellt är nollvektorn parallell med alla vektorer – varför?)

Två icke-parallella vektorer $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ i rummet spänner upp ett plan och är därför en bas för detta plan. I samma plan finns också många andra baser.

Exempel I en bas $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ för ett plan π gäller att $\vec{u} = (1, 3), \vec{v} = (-2, 2)$. Utgör dessa en annan bas?

För att svara på det måste vi avgöra om de är parallella:

$$(1, 3) = x(-2, 2) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -2x \\ 3 = 2x \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -2x \\ 4 = 0 \end{cases}$$

vilket saknar lösning. De är alltså inte parallella. Därmed utgör de en annan bas för samma plan π.

Varför samma plan? Varje vektor som kan skrivas som en linjärkombination av $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ kan också skrivas som en linjärkombintion av $\vec{u}, \vec{v}$ eftersom vi kan skriva de två vektorerna $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ på det sättet. Varför? Vi vet att

$$\begin{cases} \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 = \vec{u} \\ -2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 = \vec{v} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 = \vec{u} \\ 8\vec{e}_2 = 2\vec{u} + \vec{v} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{e}_1 = \frac{1}{4}\vec{u} - \frac{3}{8}\vec{v} \\ \vec{e}_2 = \frac{1}{4}\vec{u} + \frac{1}{8}\vec{v} \end{cases}$$

Vi kan nu uttrycka vektorerna $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ i koordinatform i basen $\vec{u}, \vec{v}$ som

$$\vec{e}_1 = (\frac{1}{4}, -\frac{3}{8}), \quad \vec{e}_2 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{8}).$$

Exemplet illusterar att vi kan använda olika baser. Olika baser ger olika koordinater för en given vektor

Exempel Fixera en bas $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ för rummet och uttryck vektorer i rummet i den. Är vektorerna $\vec{u}_1 = (1, 1, 2)$, $\vec{u}_2 = (1, -1, 1)$, $\vec{u}_3 = (7, 1, 11)$ en bas för rummet?

De är så precis om de är linjärt oberoende. För att avgöra om de är så ställer vi upp ekvationen

$$x_1(1, 1, 2) + x_2(1, -1, 1) + x_3(7, 1, 11) = (0, 0, 0)$$

som är ekvivalent med ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 11x_3 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 7x_3 & = 0 \\ \quad - 2x_2 - 6x_3 & = 0 \\ \qquad\qquad 0 & = 0 \end{cases}$$

så lösningen på ekvationssystemet är

$$x_1 = -4t, \quad x_2 = -3t, \quad x_3 = t.$$

Det finns alltså andra lösningar än noll-lösningen, vilket betyder att vektorer är linjärt beroende.

Exempel Är vektorn $\vec{v} = (-10, 4, 24)$ en linjärkombination av $\vec{u}_1 = (-1, 2, 3)$, $\vec{u}_2 = (2, 4, -3)$?

Frågan är om det finns x_1, x_2 sådana att $(-10, 4, 24) = x_1(-1, 2, 3) + x_2(2, 4, -3)$, alltså

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = -10 \\ 2x_1 + 4x_2 = 4 \\ 3x_1 - 3x_2 = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 &= -10 \\ \quad 8x_2 &= -16 \\ \quad 0 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = -2 \end{cases}.$$

Så svaret är ja!

Rummet R^n

Två linjärt oberoende geometriska vektorer spänner upp ett vektorrum som vi tänker på som ett plan. Alla andra vektorer kan anges i form av sina koordinater (x_1, x_2) relativt denna bas. Addition av vektorer svarar då mot addition av talparen etc. På motsvarande sätt svarar vektorer i rummet om vi specificerar en bas mot en taltrippel (x_1, x_2, x_3).

Vektorrummet R^n definieras som alla n-tupler $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ så att vi adderar dem komponentvis och multiplicerar med skalärer genom att multiplicera alla komponenterna med talet. Fungerar som ovan (läs kapitlet ovan).

Exempel Låt vektorerna $\vec{u}_1 = (2, 0, 1, 3), \vec{u}_2 = (0, 1, 1, -1), \vec{u}_3 = (1, -1, 0, 2)$ vara givna vektorer i R^4. Gäller att de

1. spänner upp R^4?
2. är linjärt oberoende?

För den första frågan ska vi avgöra om en godtycklig vektor $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ kan skrivas som en linjärkombination av de givna:

$$(y_1, y_2, y_3, y_4) = x_1(2, 0, 1, 3) + x_2(0, 1, 1, -1) + x_3(1, -1, 0, 2).$$

Detta är ekvivalent med ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x_1 \quad + x_3 &= y_1 \\ \quad x_2 - x_3 &= y_2 \\ x_1 + x_2 &= y_3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= y_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 \quad + x_3 &= y_1 \\ \quad x_2 - x_3 &= y_2 \\ \quad -x_3 &= y_1 + 2y_2 - 2y_3 \\ \quad 0 &= 4y_1 - 2y_3 - 2y_4 \end{cases}$$

Vi ser alltså att systemet är lösbart om (och endast om)

$$4y_1 - 2y_3 - 2y_4 = 0,$$

och vektorer spänner därför upp endast denna delmängd av R^4.

Den andra frågan löser vi genom att lösa ekvationssystemet med $(0, 0, 0, 0)$ i högerledet. Vi ser då att enda lösningen är $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, och slutsatsen är att vektorerna är linjärt oberoende.

Egentligen är det självklart att vektorerna inte kan spänna upp R^4. Varför?

Egenarbete

Lös uppgifterna **6.1–6.5**.

Koordinatsystem

Vektorer beskriver förflyttningar men rummet består av punkter. Men vi kan beskriva läget av punkter genom förflyttningar om vi inför en startpunkt som vi utgår ifrån. Startpunkten kallas *origo* och betecknas vanligen O.

Efter val av startpunkt kan vi identifiera varje punkt med en vektor, nämligen förflyttningen som för oss till punkten. Dessa vektorer kan i sin tur beskrivas om vi fixerar en bas för dem.

Punkterna beskrivs därför med hjälp av ett koordinatsystem $0\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ och punkterna anges i koordinater (x_1, x_2, x_3):

$$\overrightarrow{OP} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$$

På motsvarande sätt kan punkter i plan eller högre-dimensionella rum beskrivas.

Exempel Beskriv delmängden

$$M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4;\ 4x_1 - 2x_2 - 2y_4 = 0\}$$

i R^4. Den är ett linjärt underrum i den meningen att om $x, y \in M$ så gäller att $ax + by \in M$ för alla skalärer a, b. Ange en bas för M.

Svar: En bas för M ges av $\vec{u}_1 = (2, 0, 1, 3), \vec{u}_2 = (0, 1, 1, -1), \vec{u}_3 = (1, -1, 0, 2)$.

Egenarbete

Gör övningarna **3.1–3.3** och fundera på sambandet mellan punkter och vektorer i rummet. Vad är vad och hur är de relaterade? Genomför sedan räkningarna i det sista exemplet ovan.