Föreläsning 10

Linjär algebra (FMA420)
Anders Källén

Innehåll: Diagonalisering

Kapitel 10.3

Efter dagens föreläsning måste du

- kunna diagonalisera matriser (om det går)
- kunna använda detta till att lösa s.k. rekursionsekvationer

Diagonalisering av en matris

Vi ska nu fortsätta diskussionen från föregående föreläsning. Det vi såg där var att om vi har en linjär avbilding som beskrivs av sin avbildningsmatris, så får den senare ofta en enklare form om vi tittar på den linjära avbildningen i en annan bas, nämligen en bas av egenvektorer. Först några definitioner:

> En linjär avbildning sägs var diagonaliserbar om det finns en bas i vilken avbildningsmatrisen är en diagonalmatris (dvs alla element utanför diagonalen är noll).

Ett alternativt sätt att uttrycka detta är att säga att

> en matris A är diagonaliserbar om det finns en inverterbar matris S sådan att
> $$S^{-1}AS = D,$$
> där D är en diagonalmatris. Att bestämma S och D brukar kallas att diagonalisera A.

Anmärkning Här är alltså A matrisen till den linjära avbildning i någon första bas E och den nya basen är $E' = ES$.

Anmärkning Matriserna S och D behöver inte vara entydigt bestämda; S beror på vilken bas vi väljer och D på i vilken ordning den nya basen placeras i S. Dock kommer elementen i D av nödvändighet vara egenvärdena till A. Vi har nämligen att

$$\det(\lambda I - A) = \det(S(\lambda I - D)S^{-1}) =$$

$$\det S \det(\lambda I - D) \det S^{-1} = \det(\lambda I - D),$$

så ekvationen $\det(\lambda I - D) = 0$ har precis diagonalelementen som lösningar.

Notera att eftersom S består av egenvektorer är en $n \times n$-matris A diagonaliserbar om och endast om den har n linjärt oberoende egenvektorer. (Varför kan den inte ha fler?) Speciellt följer att

> En $n \times n-$matris A är alltid diagonaliserbar om den har n olika egenvärden.

Detta därför att varje egenvärde måste ha minst en egenvektor! Dessutom kan denna inte vara en kombination av egenvektorer till andra egenvärden.

En annan allmän observation är att

> om A är symmetrisk, så gäller att egenvektorer till olika egenvärden måste vara ortogonala

om $Av_i = \lambda_i v_i$ så gäller att

$$\lambda_i v_i^T v_k = (Av_i)^T v_k = v_i^T A^T v_k = v_i^T A v_k = \lambda_k v_i^T v_k,$$

vilket betyder att om $\lambda_i \neq \lambda_k$ så måste $v_i^T v_k = v_i \cdot v_k = 0$.

Anmärkning En linjär avbildning är en projektion om dess avbildningsmatris är sådan att $A^2 = A$. Vi ser då från observationen ovan att om A är symmetrisk så måste projektionen vara ortogonal (tänk efter varför!). Här gäller också omvändningen.

Allmänt kan man visa att

> om A är en symmetrisk matris så är den diagonaliserbar: alla egenvärden är reella och vi har en ortonormerad bas av egenvektorer, vilket är ekvivalent med att säga att det finns en ortogonal matris S sådan att $S^T AS = D$.

En annan observation värd att göra är att

> A är inverterbar precis då inget egenvärde är noll.

Tänk efter!!! Liksom att om x är en egenvektor till den inverterbara matrisen A så är x också en egenvektor till inversen A^{-1}. Vad gäller för egenvärdena?

Egenarbete

Testa att du kan diagonalisera en matris genom att göra **10.10**. Gör sedan **10.11**.

Beräkning av matrispotenser

Om en matris är diagonaliserbar, så är det lätt att beräkna potenser av den. För att se detta, antag att $S^{-1}AS = D$ där $D = \text{diag}(d_1, \ldots, d_n)$. Då gäller att $A = SDS^{-1}$ och därför att

$$A^2 = (SDS^{-1})(SDS^{-1}) = SD(S^{-1}S)DS^{-1} = SD^2S^{-1}$$

och en snabb kontroll visar att $D^2 = \text{diag}(d_1^2, \ldots, d_n^2)$. Fortsätter vi på samma sätt ser vi att

$$A^k = SD^kS^{-1},$$

från vilket vi lätt räknar ut A^k.

Exempel Vi vill beräkna A^k för ett godtyckligt heltal k om

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Denna är symmetrisk och därmed diagonaliserbar. Så vi ska diagonalisera den. För detta bestämmer vi först det karakteristiska polynomet

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 1) - 1 = (\lambda - r_+)(\lambda - r_-)$$

där

$$r_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}).$$

Vi har alltså två olika egenvärden, vilket betyder att matrisen är diagonaliserbar. För att bestämma S måste vi räkna ut egenvektorerna. För $\lambda = r_\pm$ ska vi då lösa systemet

$$\begin{cases} (\lambda - 1)x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + \lambda x_2 = 0 \end{cases}.$$

Men om λ är ett egenvärde finns här endast en ekvation, säg $x_1 = \lambda x_2$, vilket betyder att egenvektorerna är $v_\pm = t(r_\pm, 1)$. Det betyder att

$$S = \begin{pmatrix} r_+ & r_- \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow S^{-1} = \frac{1}{r_+ - r_-} \begin{pmatrix} 1 & -r_- \\ -1 & r_+ \end{pmatrix}.$$

Vi kan nu räkna ut potenserna:

$$A^k = SD^kS^{-1} = \begin{pmatrix} r_+ & r_- \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_+^k & 0 \\ 0 & r_-^k \end{pmatrix} \frac{1}{r_+ - r_-} \begin{pmatrix} 1 & -r_- \\ -1 & r_+ \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{r_+ - r_-} \begin{pmatrix} r_+^{k+1} - r_-^{k+1} & -r_+r_-(r_+^k - r_-^k) \\ r_+^k - r_-^k & -r_+r_-(r_+^{k-1} - r_-^{k-1}) \end{pmatrix}.$$

Men $r_+ - r_- = \sqrt{5}$ och $-r_+r_- = 1$, så vi ser att

$$A^k = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} r_+^{k+1} - r_-^{k+1} & r_+^k - r_-^k \\ r_+^k - r_-^k & r_+^{k-1} - r_-^{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{k+1} & a_k \\ a_k & a_{k-1} \end{pmatrix},$$

där

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^k - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^k \right).$$

Alla dessa tal måste vara heltal – varför? De första talen är (starta med $k = 0$)

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ \ldots$$

en talföljd som kallas Fibonacciserien (efter Leonardo di Pisa, som på 1200-talet bl.a. införde de arabiska decimalsystemet till Europa).

Egenarbete

Gör **10.13, 10.14**

Några populationsmodeller

Exempel Antag att i en kaninfarm varje kaninhona föder en unge av honkön varje månad utom den första levnadsmånaden. Låt F_k beteckna antalet kaninhonor efter k månader. Vid farmens etablering införskaffades en nyfödd kaninhona och en hane. Bestäm F_k under förutsättning att inga kaniner dör.

Eftersom antalet honor efter k månader är lika med antalet månaden innan plus de nyfödda (som bestäms av antalet två månader tidigare), så ser vi att F_k ska uppfylla rekursionsekvationen

$$F_k = F_{k-1} + F_{k-2}, \quad F_0 = 0,\ F_1 = 1.$$

Vi kan lösa denna med matrisräkning genom följande trick: skriv $v_k = \begin{pmatrix} F_k \\ F_{k-1} \end{pmatrix}$. Då har vi att

$$v_{k+1} = \begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_k + F_{k-1} \\ F_k \end{pmatrix} = Av_k,$$

där A är matrisen i föregående exempel. Men det betyder att

$$v_k = Av_{k-1} = A^2v_{k-2} = \ldots = A^{k-1}v_1, \qquad v_1 = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Men i föregående uppgift beräknade vi A^k, och med beteckningar därifrån får vi att

$$\begin{pmatrix} F_k \\ F_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_k & a_{k-1} \\ a_{k-1} & a_{k-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_k \\ a_{k-1} \end{pmatrix}.$$

Vi ser alltså att lösningen $F_k = a_k$ ges av Fibonacciserien.

Samma idé som i detta exemplet kan användas till att beskriva s.k. populationsmodeller. Det handlar här om att man delar in populationen i olika ålderklasser och beskriver hur djuren i varje åldersklass (1) dör och (2) producerar avkomlingar. Sedan kan man analysera dessa förutsättningar till att avgöra vad som kommer att hända med populationen med tiden. Vi illustrerar med två exempel, ett artificiellt så att vi kan räkna igenom det, och ett som illustrerar att i verkligheten räknar man helst inte med papper och penna.

Exempel Betrakta en djurpopulation och dela in den i tre ålderklasser:

1. nyfödd (0-1-åringar)
2. ungdomar (1-2-åringar)
3. vuxna (2-3-åringar)

Inget djur antas leva mer än 3 år. Hälften av de nyfödda blir ungar och av dessa når 2/3 vuxenlivet. De nyfödda får 0.5 ungar per år (!-kanske inte helt realistiskt exempel), ungdomarna får 5 ungar per år och de vuxna 3 (alltså per djur). Låt nu $u_k = (x_k, y_k, z_k)$ vara en vektor vars komponenter består av antalet nyfödda (x_k), antal ungdomar (y_k) och antalet vuxna (z_k) efter k (räknat från någon fix tidpunkt som vi återkommer till). Då ger antagandena att $u_{k+1} = Au_k$ där

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 5 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

En sådan matris kallas en *reproduktionsmatris* och beskriver alltså dynamiken i populationen: vad som händer vad gäller reproduktion från år till år.

Det karakteristiska polynomet här är

$$p_A(\lambda) = \lambda^3 - \frac{\lambda^2}{2} - \frac{5\lambda}{2} - 1 = (\lambda - 2)(\lambda + \frac{1}{2})(\lambda + 1).$$

Låt oss först se om vi kan dra några intressanta slutsatser utan att verkligen beräkna motsvarande egenvektorer. Numrera egenvärdena efter fallande storleksordning och låt v_i vara egenvektorn till λ_i.

Antag nu att vi har en startpopulation uppdelad i åldersklasser som beskrivs av u_0. Eftersom egenvektorerna är linjärt oberoende kan vi skriva $u_0 = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3$. Ett år senare får vi då populationen

$$Au_0 = c_1Av_1 + c_2Av_2 + c_3Av_3 = c_1\lambda_1v_1 + c_2\lambda_2v_2 + c_3\lambda_3v_3,$$

och fortsätter vi detta resonemang får vi att

$$A^ku_0 = c_1\lambda_1^kv_1 + c_2\lambda_2^kv_2 + c_3\lambda_3^kv_3 = \lambda_1^k(c_1v_1 + c_2(\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^k + c_3(\frac{\lambda_3}{\lambda_1})^k).$$

Men här gäller att $(\lambda_i/\lambda_1)^k \to 0$ då $k \to \infty$ för $i = 2,3$, så vi ser att när k är stor gäller

$$u_k = A^ku_0 \approx \lambda_1^kc_1v_1 = 2^kc_1v_1.$$

Här ser vi två saker: (1) populationen växer som 2^k och (2) åldersfördelningen efter lång tid ges av förhållandet mellan komponenterna i egenvektorn v_1, som är $(12, 3, 1)$ (vilket lämnas som övning).

Vad exemplet visar är att om vi känner fertilitet och morbiditet inom varje åldersklass för en population, så kan vi också avgöra hur den kommer att tillväxa (eller kanske dö ut) och vilken ålderfördelning vi får efter lång tid. Det vi behöver ta reda på är det största egenvärdet och motsvarande egenvektor till reproduktionsmatrisen.

Exempel För en gråsälspopulation gäller följande data

Ålder:	0	1	2	3	4	5	5+
fertilitet:	0	0	0	0	0.08	0.28	0.42
överlevnad:	0.657	0.930	0.930	0.930	0.935	0.935	0

Motsvarande reproduktionsmatris har som största egenvärde $\lambda = 0.8586$ och motsvarande asymptotiska åldersfördelning (så att summan av elementen är ett) blir

$$(0.1498, 0.1146, 0.1241, 0.1345, 0.1457, 0.1586, 0.1727).$$

Vi ser t.ex. att 15% av populationen är nyfödd år från år, men också att populationen kommer att dö ut, eftersom största egenvärdet är < 1.

Egenarbete

Gör **10.18**. Jämför med Fibonacci-serien ovan.