Föreläsning 1

Linjär algebra (FMA420)
Anders Källén

Innehåll: Gausselimination och geometriska vektorer

Kapitel 1, 2.1-2.2

Efter dagens föreläsning måste du kunna

- lösa ett ekvationssystem genom Gausselimination
- addera (geometriska) vektorer

Gauss elimination

Är en algoritm som löser allmänna linjära ekvationssystem. Ska alltid användas!

Exempel Vi har att

$$\begin{cases} x+y &= 2 \\ x-2y &= 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y &= 2 \\ \quad -3y &= 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases} .$$

Till vänster har vi två ekvationer och två obekanta, till höger en entydig lösning. Tänk igenom logiken i detalj!

Exempel Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3 &= 6 \\ 2x_1-x_2+x_3 &= 1 \\ -x_1+x_2-2x_3 &= 3 \end{cases}$$

Vi gör detta genom att addera ekvationer till varandra på sådant sätt att det blir färre och färre variabler i varje ekvation räknat uppifrån och nedåt.

Steg 1: få bort x_1 från den andra och tredje ekvationen genom att bilda $e2-2e1$ respektive $e3+e1$:

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3 &= 6 \\ \quad -5x_2+3x_3 &= -11 \\ \quad\ \ 3x_2-3x_3 &= 9 \end{cases}$$

Steg 2: Få nu bort x_2 från tredje ekvationen genom att bilda $5e3+3e2$:

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3 &= 6 \\ \quad -5x_2+3x_3 &= -11 \\ \qquad\quad -6x_3 &= 12 \end{cases}$$

Mellan dessa ekvationssystem gäller ekvivalens!

Vi kan nu lätt lösa det sista systemet och få $x_1=2, x_2=1, x_3=-2$! Detta är därför också lösningen till ursprungssystemet.

Ibland får man inte en entydig lösning utan några ekvationer blir t.ex. $0=0$ eller $0=1$. Vad betyder det för ekvationssystemet?

Exempel Om Gauss eliminationen ger

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3 &= 3 \\ \quad -2x_2+6x_3 &= -4 \\ \qquad\qquad 0 &= 0 \end{cases}$$

så finns oändligt många lösningar. Hur beskriver vi dem? Ett förslag är

$$x_1 = 1-5t, \quad x_2 = 2+3t, \quad x_3 = t$$

men det finns många andra sätt. Några förslag? (I det här fallet behöver därför inte din lösning se ut som den i facit och kan ändå vara rätt.)

Egenarbete

Det är viktigt innan du går vidare att du behärskar Gausselimination (att "Gaussa" som teknologerna säger). Gå därför igenom uppgifterna **1.1–1.4, 1.9, 1.11** i övningsboken och tänk noga igenom att varje steg innebär ekvivalens.

Geometriska vektorer

För att komma från en punkt P till en punkt Q finns en kortast möjlig förflyttning (eller netto-). Själva förflyttningen är den rörelse man utför och betecknas $\overrightarrow{PQ}$. Om vi startar i P och gör förflyttningen hamnar vi i Q; startar vi i en annan punkt hamnar vi någon annanstans. Själva förflyttningen utgör en (geometrisk) *vektor*. En sådan har en *storlek* och *riktning*. Ett undantag: vektorn som har längden noll har ingen riktning! (skrivs $\overrightarrow{0}$ eller bara 0).

Saker som kan beskrivas av vektorer:

- förflyttningar (enhet: m)
- hastigheter (enhet: m/s)
- acceleration (enhet: m/s^2)
- krafter (enhet: N) - relaterade till acceleration genom Newtons tredje lag.

Vektorer kan

- adderas (tänk på en förflyttning följd av en annan)
- multipliceras med ett tal (skalär) - ändrar längd men inte riktning. Om skalären är negativ ändras riktningen till den motsatta!
- subtraktion = addition av en vektor med minus en annan.

Exempel Om O, P, Q är tre punkter kan vi skriva

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}.$$

Exempel (Mittpunktsformeln) Om O, P, Q är tre punkter och M är mittpunkten på sträckan mellan P och Q, så gäller att

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}).$$

Följer av följande räkning (rita upp!!!)

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OP} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ})$$

Exempel (Tyngdpunktsformeln) Låt P, Q, R vara hörn i en triangel och låt P_1 vara mittpunkt på sträckan QR. Sträckan PP_1 sägs då vara en *median*. Vidare, låt M vara den punkt på medianen PP_1 som delar denne i förhållandet 2:1. Då gäller (för allmän punkt O) att

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}).$$

Speciellt gäller att M är skärningspunkten mellan de tre medianerna (varför?)

Formeln följer ur följande räkning:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \frac{2}{3}\overrightarrow{PP_1} = \overrightarrow{OP} + \frac{2}{3}\frac{1}{2}(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR}) =$$

$$\overrightarrow{OP} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}) + \frac{1}{3}(\overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP}) = \text{svaret}$$

Egenarbete

Först måste man kunna addera geometriska vektorer: gör **2.1–2.4**.

Sedan går du igenom diskussionen om mittpunktsformeln och tyngdpunktsformeln ovan genom att göra **2.5–2.7**.