Föreläsning 2

Endimensionell analys (FMAA005)
Anders Källén

Innehåll: Faktorsatsen

Kapitel 2.3

1. Kvadratkomplettering m.m.
2. Polynom och rationella funktioner
3. Faktorsatsen
4. Algera och geometri - Pythagoras' sats

Efter dagens föreläsning måste du kunna

- Lösa andragradsekvationer medelst kvadratkomplettering
- Polynomdivision
- Formulera, bevisa och använda faktorsatsen

Andragradsekvationer

Glöm *pq*-formeln! Lär dig kvadratkomplettera.

Exempel Om vi ska lösa ekvationen $x^2 - x - 2 = 0$ skriver vi om vänsteledet enligt

$$x^2 - x - 2 = (x - \frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2 - 2 = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}.$$

Att sätta detta lika med noll är ekvivalent med

$$(x - \frac{1}{2})^2 = \frac{9}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x - \frac{1}{2} = \pm\frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

Ett alternativt sätt är att göra en faktorisering genom att använda konjugatregeln: Fullfölj räkningarna ovan som $x^2 - x - 2 =$

$$(x - \frac{1}{2})^2 - (\frac{3}{2})^2 = ((x - \frac{1}{2}) + \frac{3}{2})((x - \frac{1}{2}) - \frac{3}{2}) = (x+1)(x-2).$$

Vi ser då att $x^2 - x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)(x-2) = 0$, och det senare kräver att antingen $x + 1 = 0$ eller $x - 2 = 0$, vilket ger samma svar som innan.

Ibland kan man "se" faktoriseringen av ett andragradspolynom.

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) = x^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)x + \alpha_1\alpha_2.$$

Jämför vi med vad vi har får vi ett ekvationssystem som ibland kan lösas i huvudet.

Exempel I fallet ovan ska gälla att

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \alpha_1\alpha_2 = -2 \end{cases}.$$

Om det finns heltalslösningar måste dessa vara faktorer i -2, vilket ger enda kandidaterna $\pm 1, \pm 2$. Summan ska vara 1, vilket ger två möjliga fall: $1, 1$ och $2, -1$. Endast den andra ger produkten -2.

Exempel Lös ekvationen $x^2 + 8x - 9 = 0$ i huvudet. Gör det sedan genom att systematisk plocka fram en faktorisering.

Polynom och rationella funktioner

Ett polynom av grad n är ett uttryck

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0.$$

Vi skriver $n = \deg p$ (nollpolynomet har grad noll). Jämför med heltal:

$$123 = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 = x^2 + 2x + 3, \quad x = 10.$$

Rationella tal (bråk) svarar mot rationella funktioner, vilka är uttryck på formen

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad p(x), q(x) \text{ polynom.}$$

Viktiga operationer att kunna på rationella funktioner är

- Ställa på gemensamt bråkstreck (fyll i ...):

$$\frac{1}{x^2 + 4x + 4} - \frac{1}{x-2} + \frac{x}{x^2 - 4} = \ldots = -\frac{x+6}{(x+2)^2(x-2)}$$

- Partialbråksuppdela (kommer senare)
- Polynomdivision:

$$\frac{x^4 - 3x^2 + 3x}{x^2 + 1} = x^2 - 4 + \frac{3x + 4}{x^2 + 1}$$

Jämför med $\frac{15}{7} = 2 + \frac{1}{7}$.

Sats (Polynomdivision) Om $f(x), g(x)$ är två polynom ($\deg g \geq 1$) så finns två polynom $q(x)$ (kallad kvot) och $r(x)$ (kallad rest) sådana att

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x) \quad \text{där } \deg r(x) < \deg g(x).$$

Om $f(x) = q(x)g(x)$ så säger vi att $g(x)$ delar $f(x)$, vilket vi kan skriva $g(x)|f(x)$.

Faktorsatsen

Ett nollställe till ett polynom $p(x)$ är ett *tal* sådant att $p(\alpha) = 0$.

Sats (Faktorsatsen) Om $p(x)$ är ett polynom så gäller att

$$p(\alpha) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - \alpha)|p(x).$$

Bevis. Polynomdivision ger att $p(x) = (x - \alpha)q(x) + p(\alpha)$. □

Tillämpningar av faktorsatsen:

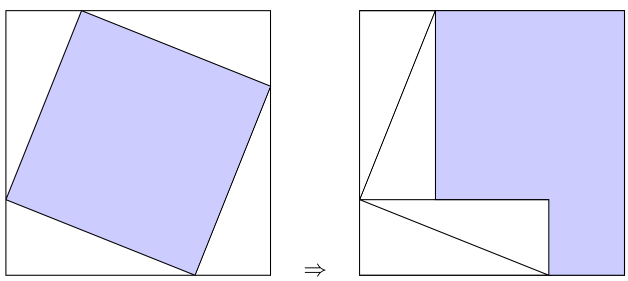
Exempel Bestäm det 4:e-gradspolynom $p(x)$ som har nollställena $0, 3, 2, -1$ och högstagradskoefficient -2. Rätt svar är $p(x) = -2x^4 + 8x^3 - 2x^2 - 12x$.

Exempel För att hitta alla nollsställen till $p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ kan vi göra följande:

1. gissa en rot
2. utför en lämplig polynomdivision
3. faktorisera kvoten
4. ange svaret, som är $-2, 1, 3$.

Algebra och geometri

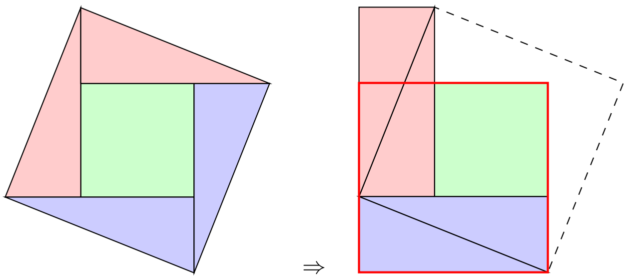
Två bevis för Pythagoras' sats.
Första (Chou-pei Suan-chia; Kina 250 f Kr):
Geometriskt



Algebraiskt:

$$(a+b)^2 = c^2 + 4\frac{ab}{2} \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 = c^2.$$

Andra (Bhaskara; Indien 1100-talet):
Geometriskt



Algebraiskt:

$$c^2 = (a-b)^2 + 4\frac{ab}{2} \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 = c^2.$$

Anmärkning Pythagoras' sats har också en omvändning:

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \Leftrightarrow \quad \text{triangeln är rätvinklig.}$$

Fås som konsekvens av den allmännare cosinussatsen.

Att fundera på till nästa gång

- För vilka tal a blir polynomet $p(x) = x^4 + ax + 4$ delbart med $x - 2$? (Gå igenom argumentet ordentligt!)
- Vad använde de gamla egyptiska byggmästarna ett rep med 13 knopar jämnt fördelade (inkl. ändarna) till?
- är $\sqrt{2}$ ett rationellt tal?